

УДК 372.8

Возможности системы компьютерной алгебры Maple для решения задач по теории множеств

К. А. Киричек, А. А. Оленев

Ставропольский государственный педагогический институт,
г. Ставрополь

Аннотация.

Введение. В статье обосновывается актуальность изучения теории множеств на уроках математики и информатики с использованием современных технологий. Целью статьи является освещение возможностей системы компьютерной алгебры Maple для задания множеств различными способами, демонстрации справедливости законов (свойств) множеств, решения текстовых задач по теории множеств.

Материалы и методы. Для разработки темы исследования были применены следующие методы: анализ школьной учебной литературы в аспекте выявления типов задач по теории множеств, анализ методической литературы и опыта работы учителей по обучению теории множеств, анализ функциональных и программных возможностей Maple, синтез возможностей Maple для выполнения заданий по теории множеств.

Результаты. Описаны возможные направления применения Maple в обучении теории множеств. Приведены примеры использования системы компьютерной алгебры для задания множеств, демонстрации справедливости законов (свойств) множеств. Широкие возможности визуализации учебного материала в Maple проиллюстрированы на примере решения текстовых задач по теории множеств различного уровня сложности.

Заключение. Результаты проведённого исследования использования Maple в обучении теоретико-множественным преобразованиям дают представление о путях совершенствования процесса обучения за счёт визуализации учебного материала, освобождения времени от рутинных вычислений, придания изучению исследовательского характера.

Ключевые

слова:

системы компьютерной алгебры, Maple, теория множеств, таблица принадлежности элементов множествам.

Для

цитирования:

Киричек, К. А., Оленев А. А. Возможности системы компьютерной алгебры Maple для решения задач по теории множеств // Педагогический ИМИДЖ. 2020. Т. 14. № 4 (49). С. 568–584.
DOI: 10.32343/2409-5052-2020-14-4-568-584

Дата поступления
статьи в редакцию:
6 августа 2020 г.

Введение

В настоящее время всё более актуальными становятся вопросы, связанные с повышением эффективности математической подготовки обучающихся в условиях внедрения новых информационно-коммуникационных технологий. Это подразумевает увеличение доли математических задач на уроках информатики при освоении предметной линии «Математические основы информатики» и широкое использование в процессе обучения систем компьютерной алгебры (СКА/CAS) как на уроках математики, так и информатики. Многие исследователи считают, что наибольшие перспективы использования имеют системы компьютерной алгебры Mathematica и Maple – лидеры среди универсального прикладного программного обеспечения такого рода [3; 8; 16].

Теория множеств представляет собой один из разделов математики, который изучается в рамках школьного курса не только математики [6; 11; 14], но и информатики [2; 7; 13]. Широкий круг применимости теории множеств к различным областям знаний можно объяснить тем, что элементами множеств могут выступать различные объекты [4]. Например, для математики чаще всего такими элементами являются алгебраические выражения, функции, геометрические фигуры, числа, для информатики – свойства информации, формы представления информации, языки программирования, для биологии – бактерии, грибы, растения, животные, для лингвистики – самостоятельные и служебные части речи, алфавит и т. д. Актуальность изучения теории множеств заключается в том, что она может выступать языком, на котором излагаются понятия, позволяет изучать свойства множеств, не обращая внимания на природу составляющих их элементов, а это подразумевает широкое применение её аппарата и в других, в том числе и нематематических науках.

Необходимость изучения теории множеств отражена в основном в содержании учебных предметов «Математика» и «Информатика» Примерной основной образовательной программы основного общего образования, однако на её изучение авторами учебников отводится незначительное количество времени (часов), а учителя уделяют лишь формальное внимание изложению данного материала [6]. Для решения описанного противоречия мы предлагаем использовать информационные технологии в преподавании теории множеств, а именно СКА Maple. Ранее нами была разработана и зарегистрирована программа для визуализации основных операций теории множеств [17]. В работе «Использование информационных технологий для ознакомления обучающихся основной школы с темой «Множество» было предложено использовать Maple-приложения, позволяющие в интерактивной форме производить операции над множествами [10]. В работе «Проверка знаний по теме «Множество» на основе системы компьютерной математики Maple» – осуществлять проверку умения обучающихся выполнять операции над множествами [12]. Продолжением проводимого нами исследования является материал данной статьи, цель которой – осветить

функциональные и программные возможности системы компьютерной алгебры Maple для задания множеств различными способами: демонстрации справедливости законов (свойств) множеств, решения текстовых задач по теории множеств.

Обзор литературы

Актуальность, необходимость и преимущества использования информационных технологий в процессе математической подготовки школьников активно обсуждаются педагогическим сообществом. Например, И. С. Сафуанов, В. А. Чугунов [16] отмечают, что компьютерные технологии можно рассматривать как инструмент для формирования понятий в процессе обучения. Г. А. Расолько, Ю. А. Кремень [15] акцентируют внимание на том, что владение СКА становится специальной ключевой компетенцией как в самой математике, так и в тех областях человеческой деятельности, где математика имеет важное инструментальное значение. Т. А. Шатунова [19] рассматривает моделирование в СКА Maple как возможность для развития универсальных познавательных учебных действий, относящихся к метапредметным результатам обучения, отражённым в действующих образовательных стандартах. С. Р. Карамышева и М. Ю. Солощенко [9] отмечают положительные стороны использования математических пакетов для творческого развития, а В. А. Далингер и А. О. Даутов [5] – для эстетического воспитания, развития логического и образного мышления обучающихся общеобразовательных школ. Л. Х. Цыбикова, Н. С. Гачегова [18] заметили повышение мотивации и уровня самостоятельности школьников в процессе овладения учебным материалом с использованием СКА, а также возможность для формирования адекватной самооценки уровня усвоенного материала. Х. Г. Вейганд [22] описывает примеры плодотворного использования СКА в отношении обобщённых целей математического образования, таких как развитие способностей обучающихся в решении задач, моделировании, доказательстве. Г. А. Расолько, Ю. А. Кремень [15] подчёркивают, что применение СКА в преподавании математики позволяет, не отказываясь от принципов фундаментальности классического образования, качественно изменить подходы и методы изложения материала, сделать его более наглядным и доступным. А. А. Бондарь [1] отмечает возможность для реализации принципа наглядности в обучении математике в школе с использованием СКА Maple. Демонстрирует возможность для создания наглядных динамических чертежей, которые могут быть сохранены в формате gif и в дальнейшем воспроизведены обычными средствами без установки Maple. А. Альхарби, Ф. Чейр, М. Сиддик [20] описывают средства анимирования иллюстраций, которые помогают в понимании математического материала, а также раскрывают возможности Maple для пользователей с небольшим опытом программирования.

Материалы и методы

Для разработки темы исследования были применены следующие методы: анализ школьной учебной литературы в аспекте выявления типов задач по теории множеств, анализ методической литературы и опыта работы учителей по обучению теории множеств, анализ функциональных и программных возможностей Maple, синтез возможностей Maple для выполнения заданий по теории множеств.

Результаты

Работа, проведённая по теме исследования, позволила раскрыть возможные направления применения системы компьютерной алгебры Maple в обучении теории множеств. Опишем их подробнее.

1. Задание множеств

Для решения задач по теории множеств с помощью СКА Maple необходимо, прежде всего, задавать базовые множества, о которых идёт речь в задачах. Библиотека

функций по теории множеств, входящая в ядро программы, позволяет производить все основные операции над множествами с учётом традиционной математической символики, делает систему компьютерной алгебры Maple идеальной платформой для теоретико-множественных экспериментов, выдвижения математических гипотез и различных предложений. Для работы с множествами существует целый ряд функций: объединение – **union**, пересечение – **intersect**, разность – **minus**, симметрическая разность – **symmdiff**, принадлежность множеству – **in**, подмножество – **subset**. В связи с чем определить (задать) множество в Maple можно не только простым перечислением элементов, но и более сложным способом – через характеристическое свойство. В частности, приведённая ниже программа позволяет задать множество, состоящее из простых чисел, не превышающих значения 100:

```
> seqn := NULL;
for i from 1 to 100 do
  if isprime(i) then seqn := seqn,i end if;
end do;
P := {seqn};
```

Результат программы, выведенный на экран:

$P := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$

2. Проверка справедливости законов (свойств) множеств с помощью таблицы принадлежности элементов множествам

Для визуализации решения задач теории множеств, выполнения операций над множествами и демонстрации справедливости законов теории множеств используют наглядное представление с помощью диаграмм, на которых множества представлены в виде кругов. Эти диаграммы носят названия диаграмм Венна, или диаграмм Эйлера-Венна. Существует и другой способ иллюстрации выполнения операций над множествами и законов теории множеств, который, на наш взгляд, является более наглядным и позволяет в дальнейшем более аргументированно перейти к объяснению организации и выполнения логических операций. Это таблица принадлежности элементов множествам, в которой рассматриваются все возможные случаи принадлежности выбранного элемента множествам A , B и C и их комбинации [21, с. 132]. Результат принадлежности элемента множествам A , B и C заполняют в первых трёх столбцах таблицы по следующему правилу: ставится или 1, если элемент принадлежит множеству, или 0, если элемент не принадлежит данному множеству. Для трёх множеств получится восемь случаев, или восемь строчек в таблице. Столбцы, соответствующие операциям объединения, – $A \cup B \cup C$, пересечения – $A \cap B \cap C$, разности – $A \setminus B \setminus C$ трёх множеств, заполняются согласно предназначению этих операций.

Осуществим проверку закона де Моргана: $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}$.

Проверку справедливости закона возможно осуществить различными способами, одним из которых является использование таблицы принадлежности элементов множествам [21, с. 132] (табл. 1).

Таблица 1

Таблица принадлежности элементов множествам
для демонстрации справедливости закона де Моргана

Tab 1

Membership table of elements to sets to demonstrate
the validity of De Morgan's law

Номер строки	Множество А	Множество В	Множество С	$\overline{A \cap B \cap C}$ K1	$\overline{A \cup B \cup C}$ K2
1	1	1	1		

2	1	1	0		
3	1	0	1		
4	1	0	0		
5	0	1	1		
6	0	1	0		
7	0	0	1		
8	0	0	0		

Определить значения для последних двух столбцов таблицы 1 можно следующим образом. Универсальным множеством U будет множество, состоящее из множества A , множества B и множества C , т. е. состоящее из номеров строк 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а множества A , B и C из строк с номерами принадлежности – «1». Таким образом, множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$, множество $B = \{1, 2, 5, 6\}$, а множество $C = \{1, 3, 5, 7\}$. Зададим их (множества) с использованием системы компьютерной алгебры Maple:

```
> restart;
> with(Logic);
> U:={1,2,3,4,5,6,7,8}; # Задание универсального множества для проверки закона де Моргана.
```

Результат выполнения программы, выведенный на экран: $U:={1,2,3,4,5,6,7,8}$

```
> множество_A:={1,2,3,4};
```

Результат, выведенный на экран: *множество_A*:= $\{1,2,3,4\}$.

```
> множество_B:={1,2,5,6};
```

Результат, выведенный на экран: *множество_B*:= $\{1,2,5,6\}$.

```
> множество_C:={1,3,5,7};
```

Результат, выведенный на экран: *множество_C*:= $\{1,3,5,7\}$.

Для демонстрации справедливости закона де Моргана с помощью таблицы принадлежности элементов множествам необходимо определить множества $\overline{A \cap B \cap C}$ и $\overline{A \cup B \cup C}$. Множеству $\overline{A \cap B \cap C}$ соответствует запись в системе компьютерной алгебры Maple:

```
> K1:=(U minus множество_A) intersect (U minus множество_B) intersect (U minus множество_C); # Задание множества  $(U \setminus A) \cap (U \setminus B) \cap (U \setminus C)$ .
```

Результат, выведенный на экран: $K1:={8}$.

Множество $\overline{A \cup B \cup C}$ можно найти в Maple следующим образом:

```
> K2:=U minus (множество_A union множество_B union множество_C); # Задание множества  $U \setminus (A \cup B \cup C)$ .
```

Результат, выведенный на экран: $K2:={8}$.

Из чего можно сделать следующий вывод: выполненные операции эквивалентны. Итог выполненных вычислений в Maple соответствует результатам, представленным в таблице 2.

Таблица 2

Таблица принадлежности элементов множествам для демонстрации справедливости закона де Моргана (результат демонстрации)

Table 2

Membership table of elements to sets to demonstrate the validity of De Morgan's law (demonstration result)

Номер строки	Множество А	Множество В	Множество С	$\overline{A \cap B \cap C}$ K1	$\overline{A \cup B \cup C}$ K2
1	1	1	1	0	0

2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0
6	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0
8	0	0	0	1	1

Проверку можно провести и с использованием библиотеки СКА Maple – Logic:

> **Equivalent(K1,K2);**

Результат, выведенный на экран: *true*.

Приведённые выше вычисления наглядно показывают справедливость закона де Моргана и позволяют при использовании аналогичного алгоритма провести исследование (проверить справедливость) и других законов теории множеств.

3. Применение СКА Maple для решения задач по теории множеств

Умение определять количество элементов после выполнения операций над множествами является одним из предметных результатов обучения информатике. Рассмотрим возможности СКА Maple для решения данного вида задач.

Задача 1. В классе 35 учеников, из них: 10 ничем не занимаются, 11 занимаются в биологическом кружке, 20 – в математическом. Сколько ребят занимаются математикой и биологией? Сколько занимаются только математикой? Сколько занимаются только биологией?

Решение. Общее количество учеников в классе является универсальным множеством U , которое состоит из трёх множеств (подмножеств) – занимающихся биологией, математикой и ничем не занимающихся.

Зададим множество U в Maple:

> **U:={seq(i,i=1..35)};** # организация множества из заданного количества элементов.

Для данного случая таких элементов 35 – взятых последовательно.

Результат, выведенный на экран:

U:={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35}.

Обозначим (зададим) множество N – множество учеников, ничем не занимающихся:

> **N:={seq(i,i=1..10)};**

Результат, выведенный на экран: **N:={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.**

Исходя из условия задачи, биологией занимаются:

> **Biologia:={seq(i,i=11..21)};**

Результат, выведенный на экран: **Biologia:={11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21}.**

Используя функцию СКА Maple **nops**, позволяющую найти (узнать) количество элементов в выбранном объекте, определим мощность множества (количество его элементов) **Biologia**:

> **nops(%);** # Определение числа (количества ребят) занимающихся биологией.

Результат, выведенный на экран: **11.**

А математикой занимаются:

> **Matematika:={seq(i,i=(35-19)..35)};**

Результат, выведенный на экран: **Matematika:={16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35}.**

> **nops (%);** # Определение числа (количества ребят) занимающихся математикой.

Результат, выведенный на экран: **20.**

Тогда биологией или математикой занимаются:

> **Biologia_or_Matematika:=U minus N;**

Результат, выведенный на экран:

$Biologia_or_Matematika := \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$.

Тогда одновременно математикой и биологией занимаются:

$> Matematika_and_Biologia := Biologia \text{ intersect } Matematika;$

Результат, выведенный на экран:

$Matematika_and_Biologia := \{16, 17, 18, 19, 20, 21\}$.

$> nops(\%);$ # Определение количества ребят, занимающихся одновременно математикой и биологией.

Результат, выведенный на экран: 6.

Чтобы найти, сколько ребят занимаются только математикой, вычтем из множества занимающихся математикой множество занимающихся одновременно математикой и биологией:

$> Tolko_Matematika := nops(Matematika) - nops(Matematika_and_Biologia);$

Результат, выведенный на экран: $Tolko_Matematika := 14$.

Чтобы найти, сколько ребят занимаются только биологией, вычтем из множества занимающихся биологией множество занимающихся одновременно математикой и биологией:

$> Tolko_Biologia := nops(Biologia) - nops(Matematika_and_Biologia);$

Результат, выведенный на экран: $Tolko_Biologia := 5$.

Далее приведён программный код в СКА Maple для построения диаграммы, иллюстрирующий решение задачи 1.

$> restart; with(plots):$

$A := \text{«Биология»}; B := \text{«Математика»};$

$N := \text{«Биол_и_Математика»};$

$S := \text{«Весь класс»}; C := \text{«Ничем»};$

$d := \text{Pi}/30; h := \text{'h'};$

$c1 := [\text{seq}(\text{evalf}([\cos(d*i)+h, \sin(d*i)]), i=0..60)];$

$h := -2.6;$

$p := \text{plot}(c1, \text{color}=\text{red});$

$h := 0.6;$

$p1 := \text{plot}(c1, \text{color}=\text{yellow});$

$h := -0.6;$

$p2 := \text{plot}(c1, \text{color}=\text{blue});$

$h := 3.8; k := 1.5;$

$t := \text{textplot}([-2.6, 1.2, \text{'C'}], \text{color}=\text{red});$

$t1 := \text{textplot}([-0.7, 1.2, \text{'A'}], \text{color}=\text{blue});$

$t2 := \text{textplot}([0.7, 1.2, \text{'B'}], \text{color}=\text{yellow});$

$t4 := \text{textplot}([0, 0.5, \text{'N'}], \text{color}=\text{gray});$

$t5 := \text{textplot}([0, 0, \text{'6'}], \text{color}=\text{gray});$

$t3 := \text{textplot}([[-2.6, 0, \text{'10'}], [0, 0, \text{'6'}],$

$[1, 0, \text{'20'}], [-1, 0, \text{'11'}], [-1.8, 1.7, \text{'S'}], [-1.7, -1, \text{'35'}]], \text{color}=\text{black});$

$\text{display}(\{p, p1, p2, t1, t2, t3, t4, t5, t\},$

$\text{axes}=\text{none}, \text{scaling}=\text{constrained}, \text{font}=[\text{COURIER}, \text{BOLD}, 12]);$

Результат программы, выведенный на экран, представлен на рис. 1.



Рис. 1. Иллюстрация решения задачи 1
Fig. 1. Illustration of the solution to problem 1

Иллюстрацию и решение вышеприведённой задачи можно представить и в другом виде:

```
> restart; with(plottools): with(plots):
U:=proc(N)
local i,q,m,a,b,s,sn,c:
for i to N do
if (i<11) then
q[i]:=disk([i,0], 0.5, color=yellow):
elif (i>10) and (i<(10+11)) then
q[i]:=disk([i,0], 0.5, color=blue):
elif (i>15) then q[i]:=disk([i,0], 0.5, color=red):
end if:
m[i]:=textplot([i,0,i]): end do:
for i to N do
if (i>(35-20))and (i<22) then q[i]:=disk([i,0], 0.5, color=gray):
end if:
m[i]:=textplot([i,0,i]): end do:
a:=seq(q[i],i=1..N):
b:=seq(m[i],i=1..N):
display(a,b,axes=none):
end proc:
```

На рисунке 2 представлена поэлементная иллюстрация решения задачи (различные цвета указывают на принадлежность к различным множествам): с номера 1 по номер 10 – ученики, ничем не занимающиеся, с номера 11 по номер 15 – занимающиеся только биологией, с номера 16 по номер 21 – биологией и математикой, остальные – занимающиеся только математикой:



Рис. 2. Поэлементная иллюстрация решения задачи 1

Fig. 2. Element-wise illustration of solving problem 1

Ответ: 6 ребят занимаются математикой и биологией; 14 – только математикой; 5 – только биологией.

Задача 2. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Решение. Осуществить решение задачи можно, основываясь на разных рассуждениях.

Первый способ решения

Зададим два множества натуральных чисел, которые отвечают свойствам делимости на 5 (обозначим соответствующее множество $S1$, а его мощность – $N1$) и на 7 (обозначим $S2$, а его мощность – $N2$), но меньших 1000, и определим мощность каждого из множеств:

```
> S1 := {seq(5*i, i = 1 .. iquo(1000-1,5))}: N1:=nops(%);
```

Результат, выведенный на экран: $N1=199$.

```
> S2 := {seq(7*i,i=1..iquo(1000-1,7))}: N2:=nops(%);
```

Результат, выведенный на экран: $N2=142$.

Так как числа 5 и 7 взаимно простые числа, то элементы пересечения множеств должны делиться и на 35 (обозначим такое множество $S3$, а его мощность – $N3$):

```
> S3:={seq(35*i,i=1..iquo(1000-1,35))}:N3:=nops(%);
```


Результат, выведенный на экран: $N3:=28$.

Используя формулу включений – исключений, можно найти все числа, которые делятся на 5 и 7:

```
> S1_union_S2:=N1+N2-N3;
```

Результат, выведенный на экран: $S1_union_S2:=313$.

Тогда числа, которые не делятся соответственно на 5 и 7, можно определить как:

```
> not_S1_intersect_not_S2:=999-%;
```

т. е. в результирующее множество входят только числа, которые не делятся ни на 5, ни на 7, а это разность между исходным множеством и объединением множеств $S1$ и $S2$.

Результат, выведенный на экран: $not_S1_intersect_not_S2:=686$.

Второй способ решения

Универсальным множеством для данной задачи будут являться все натуральные числа, меньшие 1000, зададим его в Maple следующим образом:

```
> U:={seq(i, i = 1 .. 999)};
```

Определим множество натуральных чисел, меньших 1000, не делящихся на 5 (как разность универсального множества и множества чисел, делящихся на 5), и его мощность:

```
> M:=U minus S1: U1:=nops(%); # Количество чисел, меньших 1000 и не делящихся на 5.
```

Результат, выведенный на экран: $U1:=800$.

Определим мощность множества натуральных чисел, меньших 1000, не делящихся на 5 и 7, как разность между множеством натуральных чисел, не делящихся на 5, и множеством чисел, делящихся на 7:

```
> IS:= M minus S2: U2:=nops(%); # Количество чисел, меньших 1000 и не делящихся ни на 5 и ни на 7.
```

Результат, выведенный на экран: $U2:=686$.

Можно осуществить дополнительную проверку. Для этого посмотрим, каково число натуральных чисел, делящихся и на 5, и на 7:

```
> IS1:=S1 union S2: U3:=nops(%);
```

Результат, выведенный на экран $U3:=313$.

Таким образом, существует 686 натуральных чисел, меньших 1000 и не делящихся ни на 5, ни на 7. Полученные результаты идентичны для обоих решений.

Ответ: 686 натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7.

Задача 3. В классе 20 учеников, получивших хотя бы одну двойку за учебный год, 17 учеников, получивших не менее двух двоек, 8 учеников, получивших не менее трёх двоек, 3 ученика, получившие не менее четырёх двоек, и 1 ученик, получивший пять двоек. Больше пяти двоек нет ни у кого. Сколько всего двоек в журнале?

Решение. Обозначим через А, В, С, F, Е множества учеников, получивших пять, четыре, три, две и одну двойку соответственно. С помощью следующего программного кода можно задать графическое представление задачи 3 (рис. 3):

```
> restart; with(plottools);
```

```
> with(plots);
```

```
> A1 := disk([.1, .1], .1, color = red): #Количество учеников, имеющих пять двоек.
```

```
> A2 := disk([.2, .1], .2, color = green): #Количество учеников, имеющих не менее четырёх двоек.
```

```
> A3 := disk([.3, .1], .3, color = blue): #Количество учеников, имеющих не менее трёх двоек.
```

```
> A4 := disk([.4, .1], .4, color = cyan): #Количество учеников, имеющих не менее двух двоек.
```

```
> A5 := disk([.5, .1], .5, color = orange): #Количество учеников, имеющих не менее
одной двойки.
> t := textplot([[.1, .1, A], [.3, .1, B], [.47, .1, C], [.7, .1, F], [.9, .1, E]], color = black):
> display(A1, A2, A3, A4, A5, t, axes = none);
```

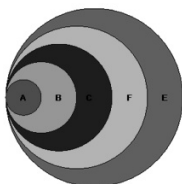


Рис. 3. Графическое представление задачи 3
Fig. 3. Graphical representation of task 3

Тогда множество A (ученик получил пять двоек) и его мощность (AK) можно задать в Maple следующим образом:

```
> A := {seq(i, i = 1)}; AK := nops(%);
```

Результат, выведенный на экран:

A:={1}.

AK:=1.

Множество B (ученики получили не менее четырёх двоек) и количество учеников, получивших две двойки (BK), можно определить следующим образом:

```
> B := {seq(i, i = 1 .. 3)}; BK := nops('minus'(B, A));
```

Результат, выведенный на экран:

B:={1, 2, 3}.

BK:=2.

Оставшиеся множества находятся аналогичным образом:

```
> C := {seq(i, i = 1 .. 8)}; CK := nops('minus'(C, B)); # Множество C (ученики получили не менее трёх двоек) и мощность CK – количество учеников, получивших три двойки.
```

Результат, выведенный на экран:

C:={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

CK:=5.

```
> F := {seq(i, i = 1 .. 17)}; FK := nops('minus'(F, C)); # Множество F (ученики получили не менее двух двоек) и его мощность FK – количество учеников, получивших две двойки.
```

Результат, выведенный на экран:

F:={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}.

FK:=9.

```
> E := {seq(i, i = 1 .. 20)}; EK := nops('minus'(E, F)); # Множество E (ученики получили не менее одной двойки) и мощность EK – количество учеников, получивших по одной двойке.
```

Результат, выведенный на экран:

E:={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

EK:=3.

Тогда общее количество двоек в журнале определим как сумму произведений количества двоек и мощности полученных множеств:

```
> 5*AK+4*BK+3*CK+2*FK+1*EK;
```

Результат, выведенный на экран: **49.**

Ответ: всего 49 двоек в журнале.

Заключение

Рассмотренные в статье направления использования Maple в изучении теоретико-множественных преобразований, конечно, не отражают всех возможностей системы, однако дают представление о путях совершенствования процесса обучения посредством визуализации учебного материала. Кроме того, освобождая от рутинных вычислений, система компьютерной алгебры Maple помогает не только по-новому взглянуть на изучаемую тему, но и существенно повысить интерес обучающихся к математике и информатике, придать процессу их освоения исследовательский характер.

Заявленный вклад авторов

Киричек К.А.: обоснование актуальности исследования, постановка проблемы и цели исследования, обзор литературы, апробация разработанных возможностей СКА Maple при обучении теории множеств, оформление текста статьи для публикации.

Оленев А.А.: постановка задач исследования, анализ литературы по теме исследования, описание возможностей системы компьютерной алгебры Maple при обучении теории множеств, апробация разработанных возможностей.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Список литературы

1. Бондарь А. А. Использование системы компьютерной алгебры Maple для создания анимации при решении задач с параметрами // Современные проблемы физико-математических наук : материалы III Междунар. науч.-практ. конф. 23–26 ноября 2017 г. Орел : ОГУ, 2017. С. 418–422.

2. Босова Л. Л., Сивкова Е. О. Элементы теории множеств в школьном курсе информатики // Информатика в школе. 2017. № 8 (131). С. 11–15.

3. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. М. : Диалектика, 2003. 352 с.

4. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 3-е издание. М. : МЦНМО, 2005. 150 с.

5. Далингер В. А., Даутов А. О. Обучение математике с использованием информационно-коммуникационных технологий как средство развития мышления и эстетического воспитания учащихся // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2019. № 2 (30). С. 11–15.

6. Евсеева А. А. О работе с понятиями теории множеств в школьном курсе математики // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2016) : материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. 25–26 ноября 2016 года. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016. С. 184–188.

7. Зыкова И. Ф. Математическое развитие школьника на интегрированных уроках информатики и математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2013. № 1. С. 92–96.

8. Игнатев Ю. Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань : Казанский университет, 2014. 298 с.

9. Карамышева С. Р., Солощенко М. Ю. Использование математических пакетов в обучении школьников математике // Проектирование и реализация математического образования в школе и вузе. Сборник научных трудов. Уфа : Башкирский государственный университет, 2015. С. 42–45.

10. Киричек К. А., Малиатаки В. В., Оленев А. А. Использование информационных технологий для ознакомления обучающихся основной школы с темой «Множество» // Информатика в школе. 2018. № 8 (141). С. 39–46.

11. Косарев А. Н. Рукописные материалы профессора Ф. Ф. Нагибина по теме «Те-

ория множеств» в средней школе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2013. С. 236–240.

12. Красильников В. В., Оленев А. А., Тоискин В. С. Проверка знаний по теме «Множество» на основе системы компьютерной математики Maple // Актуальные вопросы инженерного образования. 2015. С. 120–125.

13. Максименко О. В. Урок на тему «Множество. Число элементов множества» // Информатика в школе. 2013. № 10 (93). С. 29–36.

14. Привалов А. А. К изучению основ теории множеств на математическом кружке средней школы // Математическое образование. 2016. № 1 (77). С. 49–56.

15. Расолько Г. А., Кремень Ю. А. Использование систем компьютерной математики в обучении [Электронный ресурс] // Веб-программирование и интернет-технологии WebConf2018. Материалы 4-й Междунар. науч.-практ. конф., 14–18 мая 2018 г. Минск : БГУ, 2019. С. 29–33. URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/215039> (дата обращения: 07.02.2020).

16. Сафуанов И. С., Чугунов В. А. Варианты применения систем компьютерной алгебры в обучении углубленным разделам математики // Информатика и образование. 2019. № 1 (300). С. 50–55. DOI <https://doi.org/10.32517/0234-0453-2019-34-1-50-55>.

17. Тынчеров К. Т., Оленев А. А., Селиванова М. В. Программа для визуализации основных операций теории множеств. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2020617848, 15.07.2020. Заявка № 2020616926 от 02.07.2020.

18. Цыбикова Л. Х., Гачегова Н. С. Элективный курс: «Решение задач по теме «Многочлены» с помощью Maple» // Геометрия многообразий и ее приложения. Материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. 3–6 июля 2018 г. Улан-Удэ : Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, 2018. С. 309–313.

19. Шатунова Т. А. Математическое и компьютерное моделирование при решении оптимизационных стереометрических задач прикладного характера с использованием математического пакета Maple в профильном обучении математике // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты. Материалы II Всерос. науч.-метод. конф. Междунар. науч.-образоват. форума «Человек, семья, общество: история и перспективы развития». 5–6 ноября 2014 г. Красноярск : Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева. 2014. С. 202–208.

20. Alharbi A., Tcheir F., Siddique M. A Mathematics E-book Application by Maple Animations [Electronic resource] // Proceedings of the International Conference on Frontiers in Education: Computer Science and Computer Engineering (FECS). The Steering Committee of The World Congress in Computer Science, Computer Engineering and Applied Computing (WorldComp), 2016. P. 148. URL: <https://search.proquest.com/openview/aeaf6d1f0e4c3888ad7038e6a652f2e9/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1976352> (mode of access: 04.06.2019).

21. Rosen K.H. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, New York, 2012. 1071 p.

22. Weigand H.G. What is or what might be the benefit of using computer algebra systems in the learning and teaching of calculus? [Electronic resource] // Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education. Springer, Cham, 2017. Pp. 161–193. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-319-61488-5_8 (mode of access: 04.06.2019). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_8.

References

1. Bondar' A. A. Ispol'zovaniye sistemy komp'yuternoy algebrы Maple dlya sozdaniya animatsii pri reshenii zadach s parametrami [Using the Maple computer algebra system to create animations for solving problems with parameters]. *Sovremennyye problemy fiziko-matematicheskikh nauk : materialy III Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Modern problems of physical and mathematical sciences: materials of the III Intern. scientific-practical conf.]. 23–26 noyabrya 2017 g. Orel : OGU, 2017. S. 418–422. (in Russian).
2. Bosova L. L., Sivkova YE. O. Elementy teorii mnozhestv v shkol'nom kurse informatiki [Elements of set theory in a school course in computer science]. *Informatika v shkole – Computer science at school.* 2017. № 8 (131). S. 11–15. (in Russian).
3. Vasil'yev A. N. *Maple 8. Samouchitel'* [Maple 8. Tutorial]. M. : Dialektika, 2003. 352 s. (in Russian).
4. Vilenkin N. YA. *Rasskazy o mnozhestvakh* [Stories of sets]. 3-e izdaniye. M. : MTSN-MO, 2005. 150 s. (in Russian).
5. Dalinger V. A., Dautov A. O. Obucheniye matematike s ispol'zovaniyem informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiy kak sredstvo razvitiya myshleniya i esteticheskogo vospitaniya uchashchikhsya [Teaching mathematics using information and communication technologies as a means of developing thinking and aesthetic education of students]. *Vestnik Sibirskogo instituta biznesa i informatsionnykh tekhnologiy – Bulletin of the Siberian Institute of Business and Information Technologies.* 2019. № 2 (30). S. 11–15. (in Russian).
6. Yevseyeva A. A. O rabote s ponyatiyami teorii mnozhestv v shkol'nom kurse matematiki [On working with the concepts of set theory in a school course in mathematics]. *Matematicheskoye obrazovaniye v shkole i vuze: teoriya i praktika (MATHEDU-2016) : materialy VI Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Mathematical education at school and university: theory and practice (MATHEDU-2016): materials of the VI International. scientific-practical conf.]. 25–26 noyabrya 2016 goda. Kazan' : Kazanskiy (Privolzhskiy) federal'nyy universitet, 2016. S. 184–188. (in Russian).
7. Zytkova I. F. Matematicheskoye razvitiye shkol'nika na integrirovannykh urokakh informatiki i matematiki [Mathematical development of a student in integrated lessons in computer science and mathematics]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya «Informatizatsiya obrazovaniYA» – Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series "Informatization of Education".* 2013. № 1. S. 92–96. (in Russian).
8. Ignat'yev YU. G. *Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye fundamental'nykh ob'yektov i yavleniy v sisteme komp'yuternoy matematiki Maple. Lektsii dlya shkoly po matematicheskomu modelirovaniyu* [Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in the Maple computer mathematics system. Lectures for the School of Mathematical Modeling]. Kazan' : Kazanskiy universitet, 2014. 298 s. (in Russian).
9. Karamysheva S. R., Soloshchenko M. YU. Ispol'zovaniye matematicheskikh paketov v obuchenii shkol'nikov matematike [The use of mathematical packages in teaching students math]. *Proyektirovaniye i realizatsiya matematicheskogo obrazovaniya v shkole i vuze. Sbornik nauchnykh trudov* [Design and implementation of mathematics education at school and university. Collection of scientific papers]. Ufa : Bashkirskiy gosudarstvennyy universitet, 2015. S. 42–45. (in Russian).
10. Kirichek K. A., Maliatki V. V., Olenev A. A. Ispol'zovaniye informatsionnykh tekhnologiy dlya oznakomleniya obuchayushchikhsya osnovnoy shkoly s temoy «Mnozhestvo» [The use of information technology to familiarize students of the primary school with the topic «set»]. *Informatika v shkole – Computer science at school.* 2018. № 8 (141). S. 39–46. (in Russian).
11. Kosarev A. N. Rukopisnyye materialy professora F. F. Nagibina po teme «Teoriya mnozhestv» v sredney shkole [Handwritten materials by Professor F.F. Nagibin on the top-

ic «Theory of sets» in high school]. *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Iyatskogo regiona. Periodicheskiy mezhvuzovskiy sbornik nauchno-metodicheskikh rabot* [Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Universities of the Volga-Vyatka Region. Periodic interuniversity collection of scientific and methodological works]. Kirov : Raduga-PRESS, 2013. S. 236–240. (in Russian).

12. Krasil'nikov V. V., Olenev A. A., Toiskin V. S. Proverka znaniy po teme «Mnozhestvo» na osnove sistemy komp'yuternoy matematiki Maple [Testing the knowledge on the subject of the Set on the basis of the Maple computer mathematics system]. *Aktual'nyye voprosy inzhenernogo obrazovaniya* [Topical issues of engineering education]. 2015. S. 120–125. (in Russian).

13. Maksimenko O. V. Urok na temu «Mnozhestvo. Chislo elementov mnozhestva» [Lesson on the topic «Set. The number of elements in the set»]. *Informatika v shkole – Computer science at school*. 2013. № 10 (93). S. 29–36. (in Russian).

14. Privalov A. A. K izucheniyu osnov teorii mnozhestv na matematicheskom kruzhke sredney shkoly [To the study of the basics of set theory in a high school math]. *Matematicheskoye obrazovaniye – Mathematics education*. 2016. № 1 (77). S. 49–56. (in Russian).

15. Rasol'ko G. A., Kremen' YU. A. Ispol'zovaniye sistem komp'yuternoy matematiki v obuchenii [Elektronnyy resurs] [The use of computer mathematics systems in learning]. *Veb-programmirovaniye i internet-tehnologii WebConf2018. Materialy 4-y Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Web programming and Internet technologies WebConf2018. Materials of the 4th International. scientific-practical conf.], 14–18 maya 2018 g. Minsk : BGU, 2019. S. 29–33. URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/215039> (data obrashcheniya: 07.02.2020). (in Russian).

16. Safuanov I. S., Chugunov V. A. Varianty primeneniya sistem komp'yuternoy algebrы v obuchenii uglublennym razdelam matematiki [Options for using computer algebra systems in teaching advanced mathematics]. *Informatika i obrazovaniye – Computer science and education*. 2019. № 1 (300). S. 50–55. (in Russian). DOI <https://doi.org/10.32517/0234-0453-2019-34-1-50-55>.

17. Tyncherov K. T., Olenev A. A., Selivanova M. V. Programma dlya vizualizatsii osnovnykh operatsiy teorii mnozhestv. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM RU 2020617848, 15.07.2020. Zayavka № 2020616926 ot 02.07.2020. [A program for visualizing the basic operations of set theory. Certificate of state registration of the computer program RU 2020617848, 15.07.2020. Application No. 2020616926 dated 02.07.2020.]. (in Russian).

18. Tsybikova L. KH., Gachegova N. S. Elektivnyy kurs: «Resheniye zadach po teme «MnogochlenY» s pomoshch'yu Maple» [Elective course: «Solving problems on the topic «Polynomials» using Maple»]. *Geometriya mnogoobraziy i yeye prilozheniya. Materialy Pyatoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem, posvyashchenoy 100-letiyu professora R. N. Shcherbakova* [The geometry of manifolds and its applications. Materials of the Fifth Scientific Conference with International Participation, dedicated to the 100th anniversary of Professor R.N.Shcherbakov]. 3–6 iyulya 2018 g. Ulan-Ud·E : Buryatskiy gosudarstvennyy universitet imeni Dorzhi Banzarova, 2018. S. 309–313. (in Russian).

19. Shatunova T. A. Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye pri reshenii optimizatsionnykh stereometricheskikh zadach prikladnogo kharaktera s ispol'zovaniyem matematicheskogo paketa Maple v profil'nom obuchenii matematike [Mathematical and computer modeling for solving optimization stereometric problems of applied nature using the Maple mathematical package in specialized mathematics training]. *Aktual'nyye problemy kachestva matematicheskoy podgotovki shkol'nikov i studentov: metodologicheskiy, teoreticheskiy i tekhnologicheskiy aspekty. Materialy II Vseros. nauch.-metod. konf. Mezhdunar. nauch.-obrazovat. foruma «Chelovek, sem'ya, obshchestvo: istoriya i perspektivy razvitiYA»* [Actual problems of the quality of mathematical training of schoolchildren and students:

methodological, theoretical and technological aspects. Materials of the II All-Russia. scientific method. conf. Int. scientific and educational forum “Man, family, society: history and development prospects.”]. 5–6 noyabrya 2014 g. Krasnoyarsk : Krasnoyarskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet im. V. P. Astaf’yeva. 2014. S. 202–208. (in Russian).

20. Alharbi A., Tcheir F., Siddique M. A Mathematics E-book Application by Maple Animations [Electronic resource] // Proceedings of the International Conference on Frontiers in Education: Computer Science and Computer Engineering (FECS). The Steering Committee of The World Congress in Computer Science, Computer Engineering and Applied Computing (WorldComp), 2016. P. 148. URL: <https://search.proquest.com/openview/aeaf6d1f0e4c3888ad7038e6a652f2e9/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1976352> (mode of access: 04.06.2019). (in English).

21. Rosen K.H. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, New York, 2012. 1071 p. (in English).

22. Weigand H.G. What is or what might be the benefit of using computer algebra systems in the learning and teaching of calculus? [Electronic resource] // Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education. Springer, Cham, 2017. Pp. 161–193. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-319-61488-5_8 (mode of access: 04.06.2019). (in English). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_8.

Possibilities of the Computer Algebra System Maple for Solving Set Theory Problems

Ksenia A. Kirichek, Alexander A. Olenev
Stavropol State Pedagogical Institute, Stavropol

Abstract. Introduction. The paper substantiates the relevance of studying set theory in mathematics and computer science lessons using modern technologies. The research aims to shed light on the capabilities of the computer algebra system Maple for specifying sets in various ways, demonstrating the validity of the laws (properties) of sets, and solving set theory word problems.

Materials and methods. The methods applied in the research include analysis of school educational literature with a focus on identifying the types of tasks on set theory, analysis of methodological literature and the experience of teachers in teaching set theory, analysis of the functional and software capabilities of Maple, and synthesis of Maple capabilities to perform set theory assignments.

Results. The paper has described possible directions of Maple application in teaching set theory. The examples of using the computer algebra system to specify sets, and demonstrate the validity of their laws (properties) are presented. The possibilities of visualizing educational material in Maple are illustrated by the example of solving set theory word problems of various degrees of complexity.

Conclusion. The results of the study on the use of Maple in teaching set-theoretic transformations give an idea of ways to improve the learning process by visualizing educational material, getting time free from routine calculations, and imparting the study a research character.

Keywords: computer algebra systems, Maple, set theory, membership tables.

Acknowledgments: We would like to express our gratitude to reviewers for reviewing the paper.

Ксения Александровна Киричек

кандидат педагогических наук,
доцент, доцент кафедры математики,
информатики и цифровых образова-
тельных технологий

ORCID [https://orcid.org/
0000-0001-9571-8688](https://orcid.org/0000-0001-9571-8688)

Ставропольский государственный
педагогический институт

355029, Россия, г. Ставрополь,
ул. Ленина, 417 «А»

тел.: +7 (8652) 560821
e-mail: KirichekKA@mail.ru

Ksenia A. Kirichek

Candidate of Sciences (Pedagogy), Associate
Professor, Associate Professor at the Department
of Mathematics, Computer Science and Digital
Educational Technologies

ORCID [https://orcid.org/
0000-0001-9571-8688](https://orcid.org/0000-0001-9571-8688)

Stavropol State Pedagogical
Institute

417A Lenin St, Stavropol, Russia, 355029

tel.: +7 (8652) 560821
e-mail: KirichekKA@mail.ru



Александр Анатольевич Оленев

*кандидат технических наук,
доцент, доцент кафедры
математики, информатики
и цифровых образовательных
технологий*

*ORCID [https://orcid.org/
0000-0003-2719-6624](https://orcid.org/0000-0003-2719-6624)*

*Ставропольский государственный
педагогический институт*

*355029, Россия, г. Ставрополь,
ул. Ленина, 417 «А»*

*тел.: +7 (8652) 560821
e-mail: [olenevalexandr@gmail](mailto:olenevalexandr@gmail.com)*

Alexander A. Olenev

*Candidate of Sciences
(Engineering), Associate
Professor, Associate Professor at the Department
of Mathematics, Computer Science and Digital
Educational Technologies*

*ORCID [https://orcid.org/
0000-0003-2719-6624](https://orcid.org/0000-0003-2719-6624)*

*Stavropol State Pedagogical
Institute*

417A Lenin St, Stavropol, Russia, 355029

*tel.: +7 (8652) 560821
e-mail: [olenevalexandr@gmail](mailto:olenevalexandr@gmail.com)*